Bir fonksiyonun tersi: $f: A \to B$ birebir ve örten bir fonksiyon olsun. $f \circ g = I_B$ ve $g \circ f = I_A$ olacak şekildeki $g: B \to A$ fonksiyonuna f in tersi denir ve f^{-1} ile gösterilir. Buna göre

$$f(a)=b \Rightarrow f^{-1}(b)=a$$

dır.

Uyarı: $y=f(x)$ in varsa tersini bulmak için x yalnız bırakılır. Böylece f^{-1} y nin bir fonksiyonu olarak elde edilir. x ile y nin yerleri değiştirilerek $y=f^{-1}(x)$ bulunur.

Örnek: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=x^3-1$ fonksiyonunun birebir ve örten olduğunu göstererek tersini bulunuz.

$x_1 \neq x_2$ olan $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ için

$f(x_1)=x_1^3-1$, $f(x_2)=x_2^3-1$ olup $f(x_1) \neq f(x_2)$ dir.

O halde f birebirdir.

Herhangi bir $y \in \mathbb{R}$ alalım. $f(x)=y$ olacak şekilde $x \in \mathbb{R}$ var mı?

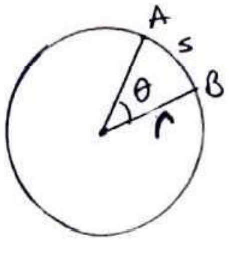
$$y=f(x)=x^3-1 \Rightarrow x^3=y+1 \Rightarrow x=\sqrt[3]{y+1}$$

O halde $f(\sqrt[3]{y+1})=y$ olup f örtendir.

f birebir ve örten olduğu için f^{-1} ters fonksiyonu vardır.

$$f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x+1}$$

Trigonometrik fonksiyonlar:



AB yayının uzunluğu

$$s=\frac{\theta}{2\pi} \cdot 2\pi r=\theta r$$

Eğer çemberi birim çember alırsak $r=1$ olacağından AB yayının uzunluğu $s=\theta$ olur.

Bu derste θ açısının ölçü birimi olarak radyan kullanılacağı için radyan ile derece arasındaki bağıntıya göz atalım:

$$360° = 2\pi \text{ radyan}$$

olduğuna göre

$$\frac{\text{Derece}}{360°} = \frac{\text{Radyan}}{2\pi} \quad \text{veya} \quad \frac{\text{Derece}}{180°} = \frac{\text{Radyan}}{\pi}$$

yazabiliriz. Örneğin;

45°'nin radyan olarak karşılığı

$$\frac{45°}{180°} = \frac{\text{Radyan}}{\pi} \Rightarrow \text{Radyan} = \pi \frac{45°}{180°} = \frac{\pi}{4}$$

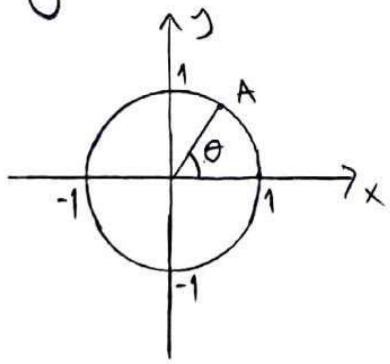
$\frac{\pi}{6}$ radyanın derece olarak karşılığı

$$\frac{\text{Derece}}{180°} = \frac{\pi/6}{\pi} \Rightarrow \text{Derece} = 180° \cdot \frac{\cancel{\pi}}{6} \cdot \frac{1}{\cancel{\pi}} = 30°$$

Uyarı: Dereceden radyana: $\frac{\pi}{180°}$ ile çarpılır.

Radyandan dereceye: $\frac{180°}{\pi}$ ile çarpılır.

Şimdi analitik düzlemde orijin merkezli birim çember vasıtasıyla trigonometrik fonksiyonları tanımlayalım: Birim çember üzerinde bir A noktası alalım.



Birim çember üzerindeki A noktasının apsisine θ reel sayısının kosinüsü, ordinatına ise θ reel sayısının sinüsü denir. Buna göre her $\theta \in \mathbb{R}$ için

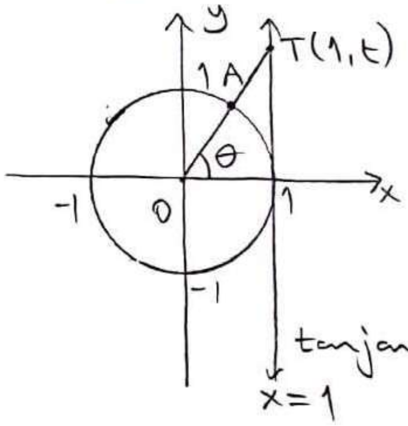
$$-1 \leq \sin\theta \leq 1$$

$$-1 \leq \cos\theta \leq 1$$

dir.

Birim çember üzerindeki A noktasının koordinatları, $A(\cos\theta, \sin\theta)$ şeklindedir.

Koordinat düzleminde x eksenine kosinüs, y eksenine ise sinüs ekseni denir.

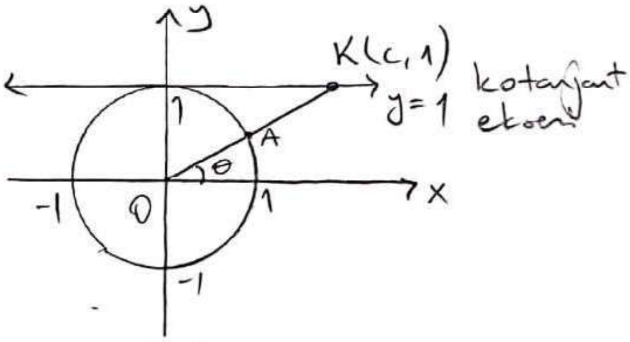


$\tan\theta = t$

Her $\theta \in \mathbb{R}$, $\theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, için $\tan\theta \in \mathbb{R}$ dir.

Üçgenlerde benzerlik kullanılarak

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

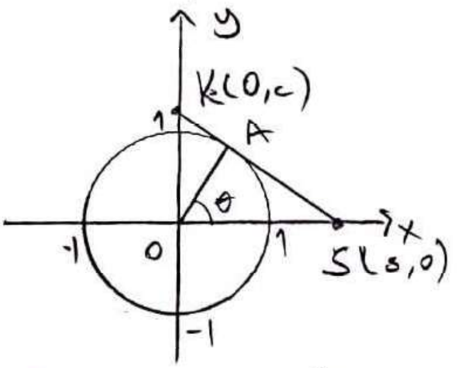


$\cot\theta = c$

Her $\theta \in \mathbb{R}$, $\theta \neq \pi + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, için $\cot\theta \in \mathbb{R}$ dir.

$$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

35



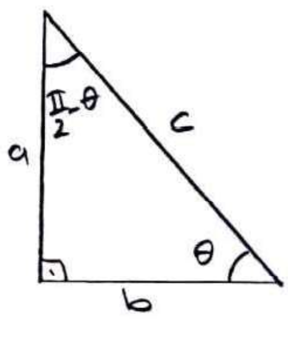
$\operatorname{cosec}\theta = c$, $\sec\theta = s$

$\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$, $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$

Uyarı: $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$, $\tan\theta \cot\theta = 1$

$\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$, $\operatorname{cosec}^2\theta = 1 + \cot^2\theta$

Dar açıların trigonometrik oranları



$\sin\theta = \frac{a}{c}$, $\cos\theta = \frac{b}{c}$, $\tan\theta = \frac{a}{b}$, $\cot\theta = \frac{b}{a}$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$

$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot\theta$, $\cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \tan\theta$

Ayrıca $\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$, $\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$

$\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$ $\quad$ $\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$

$\tan(\pi-\theta)=-\tan\theta$ $\quad$ $\tan(\pi+\theta)=\tan\theta$

$\cot(\pi-\theta)=-\cot\theta$ $\quad$ $\cot(\pi+\theta)=\cot\theta$

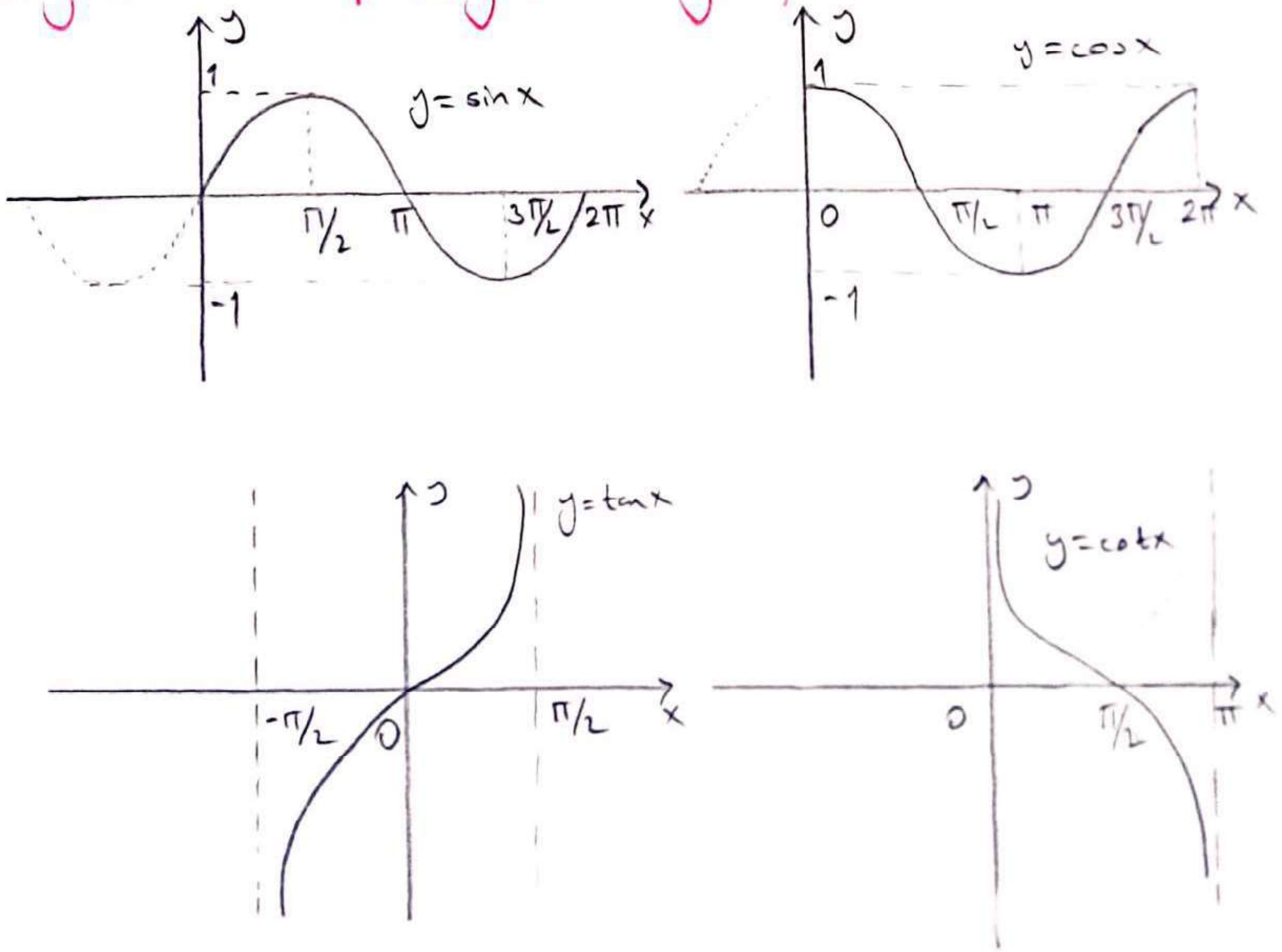
Periyodik fonksiyon: $f: A\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $x\in A$ için $f(x+p)=f(x)$ olacak şekilde bir p değeri varsa f fonksiyonuna periyodik fonksiyon, bu şartı sağlayan en küçük pozitif p sayısına ise f in periyodu denir.

Trigonometrik fonksiyonlardan sinüs ve kosinüsün periyodu 2π, tanjant ve kotanjantın periyodu ise π dir. Yani her $x\in\mathbb{R}$ için

$$\sin(x+2\pi)=\sin x,\quad \cos(x+2\pi)=\cos x$$
$$\tan(x+\pi)=\tan x,\quad \cot(x+\pi)=\cot x$$

tir.

Trigonometrik fonksiyonların grafikleri



Uyarı: $\cos(-x)=\cos x$, $\sin(-x)=-\sin x$, $\tan(-x)=-\tan x$, $\cot(-x)=-\cot x$ olduğu için $\cos x$ çift, $\tan x$, $\cot x$, $\sin x$ tek fonksiyondur.

Toplam - Fark formülleri

$$\sin(a \mp b) = \sin a \cos b \mp \cos a \sin b$$

$$\cos(a \mp b) = \cos a \cos b \pm \sin a \sin b$$

$$\tan(a \mp b) = \frac{\tan a \mp \tan b}{1 \pm \tan a \tan b}$$

$$\cot(a \mp b) = \frac{\cot a \cot b \pm 1}{\cot a \mp \cot b}$$

Çift açı formülleri

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a \qquad \tan 2a = \frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1$$

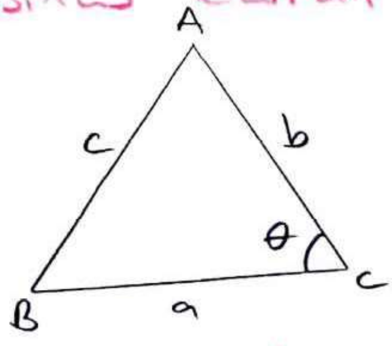
$$= 1 - 2\sin^2 a \qquad \cot 2a = \frac{\cot^2 a - 1}{2\cot a}$$

Yarım açı formülleri

$$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1 \Rightarrow \cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}$$

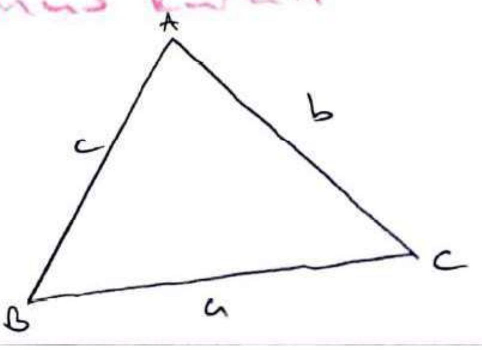
$$\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a \Rightarrow \sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}$$

Kosinüs kuralı



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$$

Sinüs kuralı



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

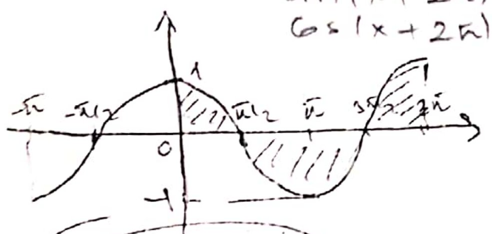
Tanım (Periyodik Fonksiyon): Her x değeri için $f(x+p) = f(x)$ olacak bir p değeri bulunabiliyorsa, $f(x)$ fonksiyonu periyodiktir. Böyle en küçük p f nin periyodu denir.

$\sin(x+2\pi) = \sin x$

$\cos(x+2\pi) = \cos x$

$\sin(x+4\pi) = \sin x$

$\tan(x+\pi) = \tan x$

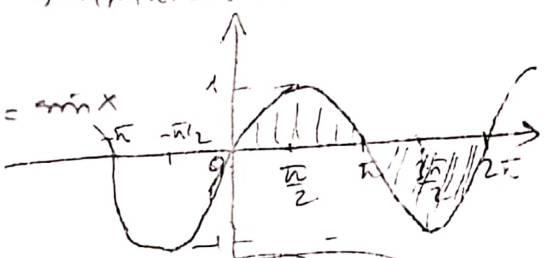


$y = \cos x$

$D = \mathbb{R}$

$R = -1 \leq y \leq 1$

$P = 2\pi$



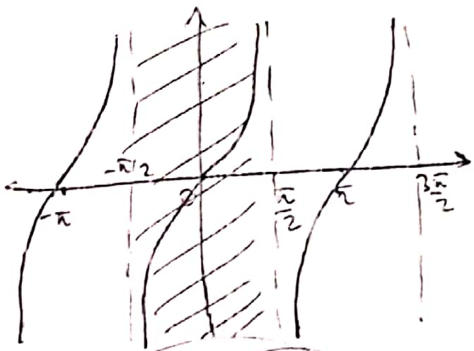
$y = \sin x$

$D = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$

$-\infty < x < \infty$

$R = -1 \leq y \leq 1$

$P = 2\pi$

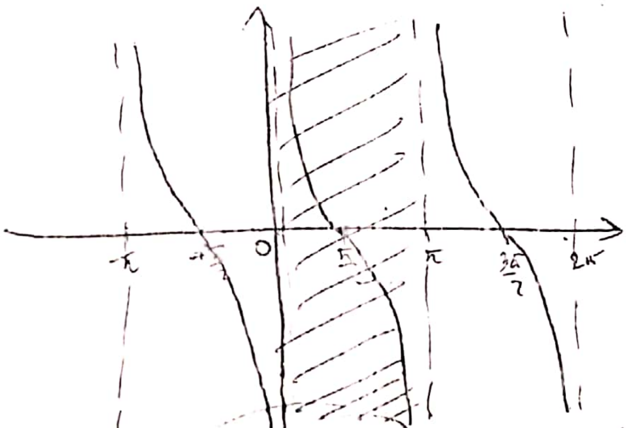


$y = \tan x$

$D = \mathbb{R} - \{x = (k+\frac{1}{2})\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$

$R = -\infty < y < \infty$

$P = \pi$



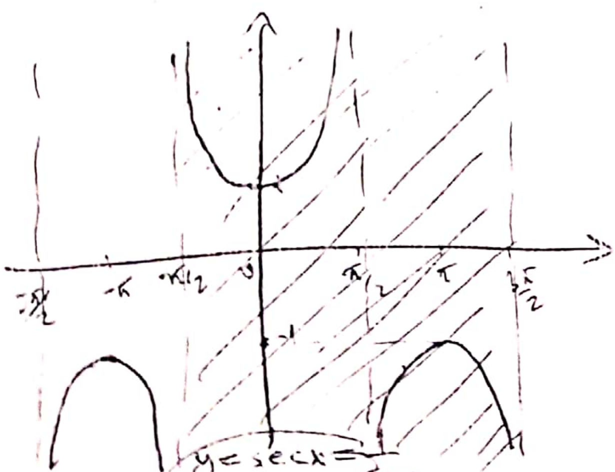
$y = \cot x$

$\lim_{x \to 0,\ x \to \pi} \frac{\cos}{\sin} =$

$D = \mathbb{R} - \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$

$R = -\infty < y < \infty$

$P = \pi$

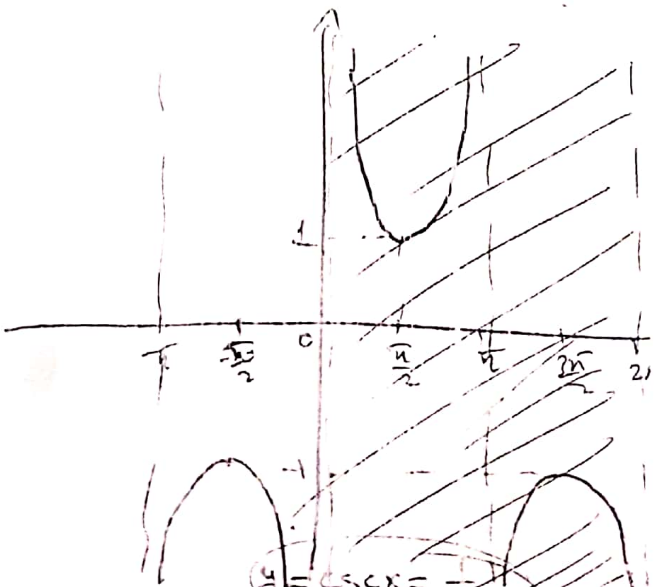


$y = \sec x = \frac{1}{\cos x}$

$D: \mathbb{R} - \{x \mid x = (k + 1/2)\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$

$R: y \leq -1$ ve $y \geq 1$

$P: 2\pi$



$y = \csc x = \frac{1}{\sin x}$

$D: \mathbb{R} - \{x \mid x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$

$R: y \leq -1$ ve $y \geq 1$

Ters Trigonometrik Fonksiyonlar

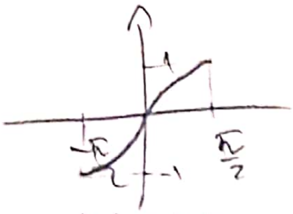
① $f(x)=\sin x$ fonksiyonu $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ aralığında 1-1 ve örten olur. Bu aralıktan tersi vardır ve tersi arcsin veya $\sin^{-1}$ fonksiyonudur.

$$y=\sin x \iff x=\arcsin y$$

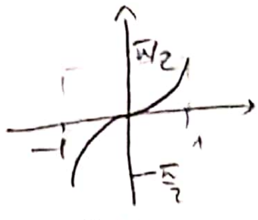
$\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$ $\qquad$ $\arcsin : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$x \longrightarrow \sin x = y$ $\qquad$ $y \longrightarrow \arcsin y = x$

$f^{-1}(y)=\arcsin x$



$f(x)=\sin x$



$f^{-1}(x)=\arcsin x$

• $(f\circ f^{-1})(x)=I(x)=x$ ve $(f^{-1}\circ f)(x)=I(x)=x$ olduğundan

$\sin(\arcsin x)=x$, $-1 \le x \le 1$ için $\qquad$ $\sin^{-1}x \neq \frac{1}{\sin x}$

ve $\arcsin(\sin x)=x$, $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ dır.

• $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)=\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{6}$ $\quad$ $\left(\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}\right)$

• $\arcsin(-1)=-\frac{\pi}{2}$

• $\arcsin 2$ tanımlı değil $\quad$ $\sin x = 2$ olan x yoktur

② $f(x)=\cos x$, $[0,\pi]$ aralığında 1-1 ve örtendir.

$$y=\cos x \iff x=\arccos y$$

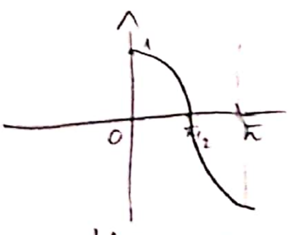
$f(x)=\cos x$ için $f^{-1}(x)=\arccos x$ olur.

$\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$

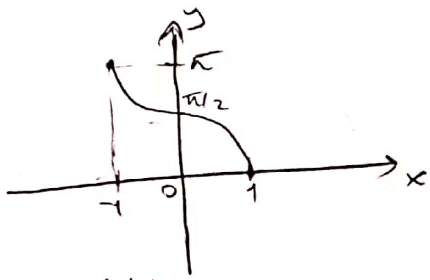
$y \to \arccos y = x$

$\cos : [0,\pi] \to [-1,1]$

$x \longrightarrow \cos x = y$



$f(x)=\cos x$



$f^{-1}(x)=\arccos x$

• $0 \le x \le \pi$ için $\arccos(\cos x) = x$

$-1 \le x \le 1$ için $\cos(\arccos x) = x$

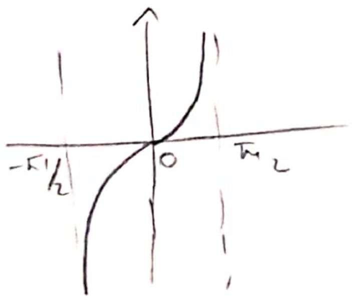
③ $f(x) = \tan x$ $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ aralığında 1-1 örtendir

$\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$

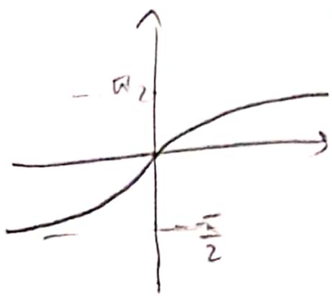
$x \to \tan x$

$\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$y \to \arctan y = x$



$f(x) = \tan x$



$f^{-1}(x) = \arctan x$

$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ için $\arctan(\tan x) = x$

$-\infty < x < \infty$ için $\tan(\arctan x) = x$

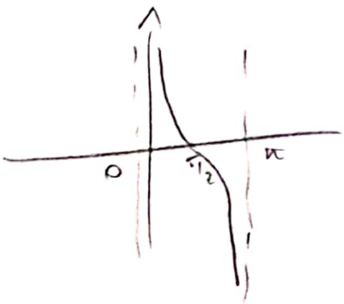
④ $f(x) = \cot x$, $(0, \pi)$ aralığında 1-1, örtendir.

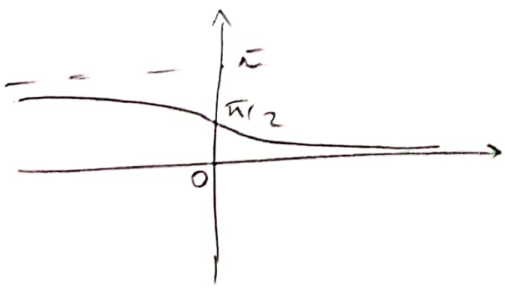
$\cot : (0, \pi) \to \mathbb{R}$

$x \to \cot x$

$\text{arccot} : \mathbb{R} \to (0, \pi)$

$y \to \text{arccot}\, y = x$





Trigonometrik denklemler

1) $\sin x = \sin\alpha$, $\sin x = -\sin\alpha$ denklemlerinin çözümü

$\sin x = \sin\alpha \iff x = \alpha + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ veya $x = \pi - \alpha + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

$\sin x = -\sin\alpha \iff x = -\alpha + 2k\pi\ k\in\mathbb{Z}$ veya $x = \pi + \alpha + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

Örnek: $\sin x = \frac{1}{2}$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

$\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \sin\frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ veya

$x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow Ç.K = \{x\in\mathbb{R} : x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}.$

Örnek: $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin x = -\sin\frac{\pi}{3} \Rightarrow x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ veya

$x = \pi + \frac{\pi}{3} + 2k\pi = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

$Ç.K = \{x\in\mathbb{R} : x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}.$

Örnek: $\sin 3x = \sin(2x + \frac{\pi}{3})$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

$3x = 2x + \frac{\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

veya

$3x = \pi - 2x - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow 5x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{2\pi}{15} + \frac{2}{5}k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

$Ç.K = \{x\in\mathbb{R} : x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \frac{2\pi}{15} + \frac{2}{5}k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}.$

2) $\cos x = \cos\alpha$, $\cos x = -\cos\alpha$ denklemlerinin çözümü

$\cos x = \cos\alpha \iff x = \alpha + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ veya $x = -\alpha + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

$\cos x = -\cos\alpha \iff x = \pi - \alpha + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ veya $x = \pi + \alpha + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

Örnek: $\cos x = -1$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

$\cos x = -1 \Rightarrow \cos x = -\cos 0 \Rightarrow x = \pi - 0 + 2k\pi$ veya $x = \pi + 0 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow ÇK = \{x \in \mathbb{R} : x = (2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Örnek: $2\cos^2 x - 5\cos x + 2 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

$2\cos^2 x - 5\cos x + 2 = 0 \Rightarrow (2\cos x - 1)(\cos x - 2) = 0$

$\Rightarrow 2\cos x - 1 = 0$ veya $\cos x - 2 = 0$

$\Rightarrow \cos x = \frac{1}{2}$ veya $\cos x = 2$

$-1 \leq \cos x \leq 1$ olduğundan $\cos x = 2$ olması mümkün değildir.

$\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ veya $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow ÇK = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ veya $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$

45

Uyarı: $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ yerine
$$x = 2\pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$
de yazılabilir.

Örnek: $\cos 2x = \sin\frac{3\pi}{8}$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

$\sin\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ olduğundan $\sin\frac{3\pi}{8} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{8}\right) = \cos\frac{\pi}{8}$

$\Rightarrow \cos 2x = \cos\frac{\pi}{8} \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{8} + 2k\pi$ veya $2x = -\frac{\pi}{8} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow x = \frac{\pi}{16} + k\pi$ veya $x = -\frac{\pi}{16} + k\pi = \pi - \frac{\pi}{16} + k\pi = \frac{15\pi}{16} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow ÇK = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{\pi}{16} + k\pi$ veya $x = \frac{15\pi}{16} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Örnek: $2\cos 2x + \sin x + 3 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ olduğu göz önüne alınırsa

$2(1 - 2\sin^2 x) + \sin x + 3 = 0 \Rightarrow 4\sin^2 x - \sin x - 5 = 0$

$\Rightarrow (4\sin x - 5)(\sin x + 1) = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{5}{4}$ veya $\sin x = -1$

$\sin x = \frac{5}{4} \geq 1$ mümkün değil.

$\sin x = -1 \Rightarrow \sin x = -\sin\frac{\pi}{2} \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ veya $x = \frac{\pi}{2} + \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ veya $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow ÇK = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

3) $\tan x = \tan\alpha$, $\cot x = \cot\alpha$ denklemlerinin çözümü

$\tan x = \tan\alpha \Rightarrow x = \alpha + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$\cot x = \cot\alpha \Rightarrow x = \alpha + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Örnek: $\tan x = \cot x$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

$\tan x = \cot x \Rightarrow \tan x = \tan(\frac{\pi}{2} - x) \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} - x + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow ÇK = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Örnek: $(\tan 2x)\cot(3x - \frac{\pi}{3}) = 1$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

$\tan x \cot x = 1$ olduğunu biliyoruz. Buna göre $\cot x = \frac{1}{\tan x}$ yazabiliriz. O halde $\cot(3x - \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{\tan(3x - \frac{\pi}{3})}$ yazarsak, verilen denklem

$$\frac{\tan 2x}{\tan(3x - \frac{\pi}{3})} = 1 \Rightarrow \tan 2x = \tan(3x - \frac{\pi}{3})$$

halini alır.

$\Rightarrow 3x - \frac{\pi}{3} = 2x + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow ÇK = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{\pi}{3} + k\pi\}$.

4) $\tan x = -\tan\alpha$, $\cot x = -\cot\alpha$ denklemlerinin çözümü

$\tan x = -\tan\alpha \Rightarrow x = \pi - \alpha + k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

$\cot x = -\cot\alpha \Rightarrow x = \pi - \alpha + k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

Örnek: $\tan 4x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

$$\tan 4x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \tan 4x = -\tan\frac{\pi}{6} \Rightarrow 4x = \pi - \frac{\pi}{6} + k\pi$$
$$= \frac{5\pi}{6} + k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow x = \frac{5\pi}{24} + k\frac{\pi}{4},\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow ÇK = \left\{x\in\mathbb{R} : x = \frac{5\pi}{24} + \frac{k\pi}{4},\ k\in\mathbb{Z}\right\}$$

5) $a\cos x + b\sin x = c$ denkleminin çözümü

Eşitliğin her iki tarafı a ile bölünerek $\cos x$ in katsayısı 1 yapılır. $\sin x$ in katsayısı olarak bulunan $\frac{b}{a}$ yerine $\tan\alpha$ yazılarak denklem çözülür.

Örnek: $\sqrt{3}\cos x + 3\sin x = \sqrt{6}$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

$$\cos x + \frac{3}{\sqrt{3}}\sin x = \sqrt{2} \Rightarrow \cos x + \sqrt{3}\sin x = \sqrt{2}$$

$\sqrt{3}$ yerine $\tan\frac{\pi}{3}$ yazılırsa

$$\cos x + \tan\frac{\pi}{3}\sin x = \sqrt{2} \Rightarrow \cos x + \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}}\sin x = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\cos\frac{\pi}{3}\cos x + \sin\frac{\pi}{3}\sin x}_{\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)} = \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{veya} \quad x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} + 2k\pi = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi \quad \text{veya} \quad x = \frac{\pi}{12} + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow ÇK = \left\{x\in\mathbb{R} : x = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi \ \text{veya}\ x = \frac{\pi}{12} + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$$

Örnek: $\tan x + \cot x - \frac{4\sqrt{3}}{3} = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

$$\underset{(\sin x)}{\frac{\sin x}{\cos x}} + \underset{(\cos x)}{\frac{\cos x}{\sin x}} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\frac{\sin 2x}{2}} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \cancel{2} \cdot \frac{3}{\cancel{4}_2\sqrt{3}} = \sin 2x \Rightarrow \sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

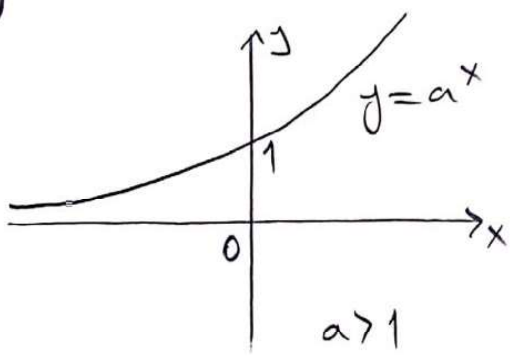
$$\Rightarrow \sin 2x = \sin\frac{\pi}{3} \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ veya } 2x = \underbrace{\pi - \frac{\pi}{3}}_{\frac{2\pi}{3}} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

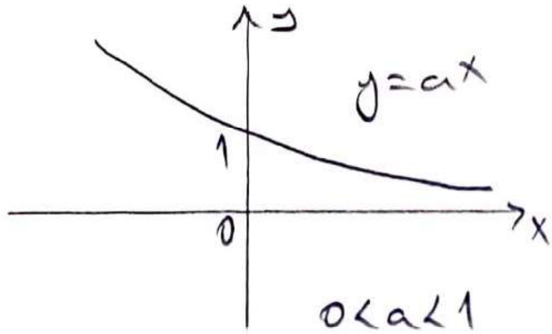
$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi \text{ veya } x = \frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow ÇK = \{x \in \mathbb{R} : \frac{\pi}{6} + k\pi \text{ veya } x = \frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$$

Üstel - Logaritma Fonksiyonları

Tanım: $a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$ olmak üzere $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$ fonksiyonuna üstel fonksiyon, a sayısına ise üstel fonksiyonun tabanı denir.





Üstel fonksiyonun tanımı ve grafikleri göz önüne alınırsa şu özellikler ifade edilebilir:

1) Üstel fonksiyonun tanım kümesi $\mathbb{R}$ dir. O halde, $a^{g(x)}$ şeklindeki bir üstel fonksiyonun tanım kümesi bulunurken; $a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$ ve $g(x) \in \mathbb{R}$ durumları incelenmelidir.